Gramática de la destreza para manipular símbolos algebraicos y gramática generativa transformadonal[1]

Bernardo Hernández-Márquez Bolio
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Guerrero
Centro de Enseñanza de Lenguas Extranjeras
Universidad Nacional Autónoma de México

En esta exposición se discute la base empleada por D. Kirshner (1987) para fundamentar su gramática de la destreza para manipular símbolos algebraicos. Principalmente se argumenta una carencia de categoría gramatical que impide, a lo largo de su trabajo, desarrollar un modelo gramatical en el sentido estrictamente lingüístico. Posteriormente, se propone suplir la ausencia de categoría gramatical con el modelo de categoría gramatical de Hernández-Márquez (1989). Por último, se da un ejemplo de transformación con la nueva propuesta.

In this paper, I discuss the base structure component employed by D. Kirshner (1987) to argument in favor of a grammatical skill pertaining to an ideal mathematician, so that he/she can manipulate algebraic symbols. Firstly, I argue that his model lacks the labeling of grammatical categories which, in turn prevents him from sustaining a grammatical model in the linguistic sense. Secondly, I propose substituting his mathematical model with the grammatical labeling model developed by Hernández-Márquez (1989) in order to make up for the deficiency. At the end I give an example of a transfonnation with the modified model.

1 Versión corregida de la crítica a David Kirshner (1987) presentada en la Sección de Matemática Educativa del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional el 15 de mayo de 1991. Ponencia presentada en el 1er. Congreso Nacional de Lingüística, CELE-UNAM, 1991.

1.0 Introducción

En su tesis doctoral, David Kirshner (1987) propone un componente gramatical que le subyace a la destreza de un matemático “competente” (en el sentido de Chomsky, N.: 1965) para manipular símbolos algebraicos. Según Kirslmer (ibidem), este componente gramatical puede construirse rigurosamente a partir de la “Ley distributiva generalizada” (LDG) propuesta por Schwartzman, S. (1977). En su tesis, el autor afinna que pudiera existir una analogía entre la LDG y la teoría lingüística generativa (TLG) propuesta por Noam A. Chomsky en 1957 y, posteriormente, revisada en 1965, ya que en ambas tesis se discute en detalle un modelo de descripción sintáctica para explicar las agrupaciones lineales que fonnan los constituyentes de una cadena de signos.

Mientras que desde el punto de vista algebraico de Kirslmer y de Schwartzman, los signos del álgebra son denotados superficialmente por los símbolos notacionales comúnmente empleados por los algebristas, desde el punto de vista de Chomsky (1957 y 1965), los signos empleados por los hablantes comunes y corrientes son denotados por fonnas léxicas en su aspecto superficial. No obstante esta diferencia en la estructura de superficie, Kirslmer piensa que las similitudes análogas entre la LDG y TLG radican en las estructuras sintácticas que describen ambos modelos. Para esto, el autor se sustenta en una notación de árbol gramatical adaptada para fines matemáticos por John E. Bemard y Ray L. Carry (1980), para construir un modelo “gramatical” que describe la destreza para manipular símbolos algebraicos. Es este último punto el que aquí discutiré con mayor detalle.

2.0 El modelo “gramatical” de D. Kirshner (1987)

En principio, el modelo adaptado por Jolm E. Bemard y Ray L. Carry no es un modelo de árbol gramatical, estrictamente hablando desde un punto de vista lingüístico. Por lo tanto, a este modelo no le corresponde el calificativo “gramatical” que emplea D. Kirslmer. La justificación de la afinnación anterior corresponde a que los árboles gramaticales (al menos en la lingüística) se construyen rigurosa y consistentemente a partir de definiciones y teoremas que requieren un sustento empírico para su validación.

Por una parte, las definiciones gramaticales son bastante precisas en tomo a conceptos como *’dominancia’, ’precedencia’ ’nodos ’ramificaciones’ y ’nodos terminales’* que de alguna manera emplean Carry y Bemard para explicar su modelo. Por otro lado, un teorema fundamental para la constmcción de árboles gramaticales, radica en postular que sólo los nodos terminales pueden ser ocupados por formas superficiales (es decir símbolos o palabras), mientras que todos los otros nodos son de tipo abstracto y los ocupan *’categorías gramaticales’* obtenidas por los análisis gramaticales correspondientes. Es esto último de lo que carece el modelo de Carry y Bemard, y es, asimismo, lo que le impide a Kirslmer hacer afirmaciones más interesantes en tomo a la relación que pudiese existir entre la déstreza para manipular símbolos algebraicos y la gramäüca de una lengua natural (principalmente, la lengua materna). A continuación, presentaré un modelo lingüístico re-adaptado del modelo adaptado por Carry y Bemard para exponer el sentido profundo e interesante que plantea la tesis de D. Kirslmer.

2.1 Gramática de la destreza para manipular símbolos algebraicos

La tesis principal de D. Kirslmer (ibidem) consiste en retomar una vieja afirmación de la TLG, en tomo a la universalidad de las estructuras sintácticas para explicar tanto los lenguajes formales como los lenguajes naturales. Su aportación original radica en dar una descripción bastante detallada de un componente transfonnacional de la destreza para manipular símbolos algebraicos, y por ende, del lenguaje notacional del álgebra elemental (ver Cuadro 1). No obstante, su componente

Gramática...(H.-M., B.)

Reglas de Base (Kirshner)	Reglas Auxiliares (Hernández-Márquez)
(i) Z → (ZOZ)	(a) 2 √ → √
(ii) Z → (NZ)	(b) ^2 → ^{2}
(iii) Z → L	(c) ÷ → ----
(iv) Z → Q	(d) • →
(v) O +,-,•,÷·^.√	(e) N → -
(vi) L a, b,c,..x,y,z	
(vii) Q→ ..0,I,2,3,4,5,6,7,8,9	

Derivación	Regla aplicada
(1) Z→ (ZOZ)	(i)
(2) Z→(Z÷Z)	(v)
(3) Z→(Z÷ (Z O Z))	(i)
(4) Z→ (Z÷(Z•Z))	(v)
(5) Z→ (Z÷(Q•Z))	(iv)
(6) Z→(Z÷(4•Z))	(vii)
(7) Z→(Z÷(4•L))	(iii)
(8) Z→(Z÷(4•y))	(vi)
(9) Z→ ((ZOZ)÷(4•y))	(i)
(10) Z→ ((Z - Z)÷(4•y))	(V)
(11) Z→ ((Z-Q)÷(4•y))	(iv)
(12) Z→((Z -5)÷ (4•y))	(vii)
(13) Z→(((ZOZ)-5)÷(4•y))	(i)
(14) Z→(((Z√Z)-5)÷(4•y))	(V)
(15) Z→(«O√Z)-5)÷(4•y))	(iV)
(16) Z→(((2√Z) - 5)÷ (4r•y))	(vii)
(17) Z→(((2√(ZOZ))-5)÷÷(4•y))	(i)
(18) Z→ (((2√ *(2.* + Z))÷5) ÷ (4 • y))	(V)
(19) Z→ (((2√(Z + Q))-5)÷(4•y))	(iv)
(20) Z→(((2√(Z + 3))-S)÷(4•y))	(vii)
(21) Z→(((2√((NZ) + 3))-5)÷(4•y))	(ii)

$$(22)\ Z \rightarrow (((2 \surd ((N(Z\ O\ Z)) + 3)) - 5) \div (4 \bullet y)) \qquad (i)$$

$$(23)\ Z \rightarrow (((2 \surd ((N(Z \wedge Z)) + 3))-5) \div (4 \bullet y)) \qquad (v)$$

$$(24)\ Z \rightarrow (((2 \surd ((N(L \wedge Z)) + 3))-5) \div (4 \bullet y)) \qquad (iii)$$

$$(25)\ Z \rightarrow (((2 \surd ((N(x \wedge Z)) + 3))-5) \div (4 \bullet y)) \qquad (vi)$$

$$(26)\ Z \rightarrow (((2\ s/((N(x \wedge Q)) + 3)) - 5) \div (4 \bullet y)) \qquad (iv)$$

$$(27)\ Z \rightarrow (((2\ s/((N(x \wedge 2)) + 3)) - 5) \div (4 \bullet y)) \qquad (vii)$$

$$(28)\ Z \rightarrow (((2\ s/((N(x \wedge 2)) + 3)) - 5) \div (4y)) \qquad (d)$$

$$(29)\ Z \rightarrow \frac{(((2\ s/((N(x \wedge 2)) + 3)) - 5)}{(4y))} \qquad (c)$$

$$(30)\ Z \rightarrow \frac{(((2\ s/((N(x^2)) + 3)) - 5)}{(4y))} \qquad (ó)$$

$$(31)\ Z \rightarrow \frac{(((2\ s/((N(x^2)) + 3)) - 5)}{(4y))} \qquad (e)$$

$$(32)\ Z \rightarrow \frac{(((2\sqrt{((N(x^2)) + 3)) - 5)}}{(4y))} \qquad (a)$$

Borrando paréntesis:

$$\frac{2\sqrt{-x^2 + 3\text{-}5}}{4y}$$

Cuadro 1. Modelo gramatical de D. Kirshner (1987).

transfomiacional carece en lo fundamental de una postulación de categorías gramaticales, a lo que Kirshner descarta como un simple problema de etiquetación de los nodos (comunicación personal). El problema de etiquetación no es tan simple como propone Kirslmer y requirió de una tesis para sustentar su existencia; la tesis en cuestión es la de Hernández-Márquez (1989), la cual, sienta las bases para sustentar la analogía entre la lengua natural y un lenguaje matemático. En dicha tesis se argumenta la existencia de categorías gramaticales para las expresiones y ecuaciones básicas del álgebra elemental, análogas a las categorías gramaticales de estructuras sintácticas dominantes en español (Oración, Sintagma Nominal, Sintagma Verbal, Núcleo Nominal, Núcleo Verbal), las que incluiré aquí para complementar el modelo transfonnacional de Kirslmer, aunque no se discutirán en este trabajo.

En esencia, el modelo adaptado de árbol gramatical de Carry y Bemard puede sustituirse por un modelo adaptado de árbol" gramatical con barras (x-bar syntax). En este modelo, las barras corresponden a niveles intennedios de categorías y sub-

2 El modelo adaptado que propongo no contempla el rigor de la Teoría de x-barra y de la Teoría-Θ de la Teoría de Rección y Ligamiento (Government and Binding) de la Gramática Universal propuesta por N. Chomsky (1981 y 1986) (V.S. Cook: 1988), sin embargo, no descarta la posibilidad de adecuación a estos desarrollos más recientes de la TLG.

categorías gramaticales, que lo único que indican es que una categoría con equis número de barras se ramifica hacia otro nodo con otra categoría gramatical con un número menor de barras. Este procedimiento que parece validarse empíricamente, permite la construcción de árboles gramaticales que a su vez pueden dar cuenta de las incrustaciones de oraciones o expresiones en distintos tipos de sintagmas, ya que son estos últimos los únicos que pueden generar expresiones y ecuaciones en la TLG (ver Figura 1).

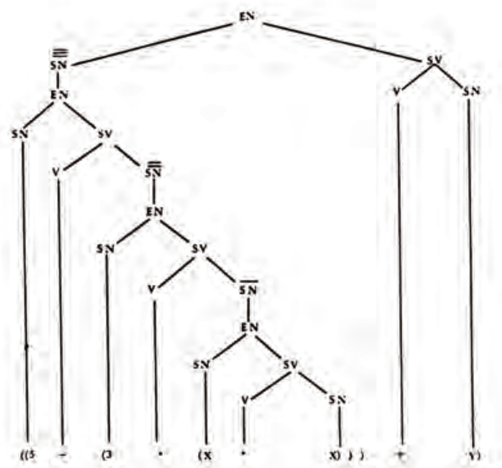


Figura 1. Arbol gramatical para 5-3x^2+y. (Hernández-Márquez)

A su vez, el postular niveles de categoría gramatical intermedia, o subcategorías, permite establecer una analogía directa con la teoría de la jerarquía de las operaciones aritméticas de la LDG de Schwartzman, en donde propone tres niveles de profundidad de subcategorización para los operadores aritméticos: 1er. nivel, suma y resta; 2o. nivel, multiplicación y división; 3er. nivel, elevación exponencial y obtención de raíz. Como comentario al margen, en las lenguas naturales se postula que el máximo de barras de subcategorización que puede tener una categoría gramatical es siete, en virtud de la capacidad de retención de la memoria, ya que, aunque en teoría es posible construir un número infinito de barras, en los hechos, la memoria difícilmente retiene más de siete oraciones subordinadas. He aquí, pues, que una gramática de categorías con barras puede ser el sustento que le falta a Kirshner para afirmar que una expresión algebraica se puede construir con un número teóricamente infinito de subexpresiones o expresiones algebraicas subordinadas.

3.0 Modelo gramatical de Hérnandez-Márquez (1991)

3.1. Transformación de la estmctura de la expresión algebraica nuclear

El modelo gramatical que aquí se propone, y al cual parece suscribirse Kirslmer, se compone de dos niveles de estmctura sintáctica -una estmctura profunda y una estmctura superficial- que se relacionan por medio de transformaciones. Este modelo podría esquematizarse de la siguiente forma:

3.1.1. BASE

Reglas de Estmctura Sintagmática (Phrase Structure Rules), Léxico (Símbolos), Reglas de Redundancia, Reglas de Formación de Palabras (Formación de Símbolos), Reglas de Reestructuración, *et cetera).*

EDUCTO DE LA BASE: Estructuras profundas

3.1.2. TRANSFORMACIONES

(Reglas de Movimiento de Constituyentes)

EDUCTO DE LAS TRANSFORMACIONES: Estructuras superficiales

Aunque Kirslmer denomina su modelo de base como “Reglas de Estmctura Sintagmática” (Phrase Structure Rules), no es posible asignarle ese nombre en estricto apego a la TLG por las razones que arriba he mencionado, en particular, su carencia de categorías gramaticales. Sería más adecuado denominarlas *“Reglas de Reestructuración”* en virtud de que reestructuran la estmctura sintagmática de la oración al sustituir con símbolos algebraicos los nodos dominantes de la estmctura profunda de la expresión algebraica. En el Cuadro 1 les he dado el nombre de “Reglas de Base”, ya que, de cualquier manera pertenecen a las estmcturas profundas de la base. En adelante, me referiré a ellas como ’reglas de reestructuración’ por las razones mencionadas arriba. Regresando al modelo gramatical que se propone, el modelo gramatical de la estmctura profunda de la expresión algebraica se podría componer de un conjunto de reglas de estmctura sintagmática (ver Hernández-Márquez, 1989) que pudieran paulatinamente ’encogerse’ o restringirse a un conjunto de reglas de reestmcturación (Kirslmer, D.: 1987), lo que proporcionaría la base para las reglas de movimiento de constituyentes (o transformaciones) en la tesis bajo consideración. Estas reglas se verán con mayor detalle a continuación.

3.2. Reglas de estmctura sintagmática

Este conjunto de reglas genera un prototipo de expresión algebraica nuclear (EN) que a grandes rasgos se subdivide en un sintagma nominal (SN) que permite la inserción de cantidades numéricas incluyendo decimales, variables expresadas con fonnas literales, y valores positivos y negativos, así como a otra EN; un sintagma verbal (SV) que inmediatamente domina a una categoría verbal (V) que permite la inserción de operadores binarios tales como los de la aritmética y, otro SN con las mismas características mencionadas arriba.

3.3. Reglas de reestructuración

Este conjunto de reglas genera, principalmente, incrustaciones de subexpresiones y expresiones dentro de expresiones y subexpresiones al reestructurar la base con símbolos algebraicos que denotan las categorías gramaticales. Como menciona Kirslmer, las reglas de reestructuración deben contemplar restricciones en cuanto a convenciones establecidas para fonnar correctamente expresiones algebraicas que pennitan la jerarquía de las operaciones aritméticas, así como lo postula la teoría de la LDG. Es posible que bajo estas reglas, también deban considerarse las reglas (o los principios, en su sentido de Gramática Universal) de reordenación de las reglas, tanto como, las reglas de ordenación de las reglas. Este último aspecto no está muy claro en Kirslmer y da lugar a confusión y ambigüedades. En su tesis las maneja indistintamente en las reglas de reestructuración y en las reglas de transformación. Es probable que si las explicitara en las reglas de reestructuración, habría menos problemas para explicitar las reglas de movimiento de constituyentes y, posiblemente, se requerirían menos transformaciones que las 45 que postula.

3.4. Reglas de movimiento de constituyentes

Parece ser que para todo matemático es tan habitual el manejo de ecuaciones algebraicas que rara vez analizan el sentido gramatical del signo de igualdad. En todo el trabajo de D. Kirslmer no se encuentra una sola mención del signo de igualdad como un operador binario que también construye expresiones y, probablemente, las más significativas de todas. Creo que si algo en el álgebra puede sustentar un nivel de estructura sintáctica con reglas de movimiento de constituyentes es, sin duda alguna, la expresión ecuacional (EE); es ésta la que en gran parte permite la reestructuración de las expresiones aritméticas nucleares. Por sí sola, la EN (es decir, aquélla que contiene un operador aritmético como la smna o la multiplicación) se parece mucho a un sintagma nominal sacado del contexto de una oración, es decir, se convierte en un objeto metalingüístico que sólo tiene sentido para las cavilaciones de un lingüista o de un gramático. Su sentido lo adquiere cuando se aparea con otra EN subordinada a un sintagma verbal cuyo verbo se simboliza superficialmente con el operador de igualdad " = ", Una explicación para esta omisión de Kirshner puede deberse a que, gran parte de su análisis lo sustenta con la simple sustitución del signo de igualdad " = " por el signo de reescrituracíón "→" de la TLG, cuando postula sus 45 transformaciones. Ninguna de sus transfonnaciones se fundamenta en una descripción estructural y en un cambio estructural. Así pues, su concepto de transformación corresponde a cambios en la estructura superficial debido a situaciones de uso de las expresiones y ecuaciones por parte de los matemáticos, y no a cambios en la estructura profunda de la expresión.

Para Kirslmer, la transfonnación está dada en el contexto de un nivel pragmático; a esta transfonnación la rigen situaciones y contextos particulares. Estas situaciones le penniten al algebrista decidir entre 'simplificar' la expresión, 'factorizar' la expresión, 'reducir' la expresión o, sencillamente, 'resolver' la expresión. Bajo esta perspectiva, las decisiones del algebrista lo conducen a establecer distintas estrategias para transfonnar la expresión.

En su tesis, Kirslmer, da un ejemplo de estrategia seguida por un algebrista. La estrategia seguida por el algebrista le pennite utilizar sucesivas transfonnaciones que aplica a fonnas profundas para reducir una oración como:

(a)-$\frac{(2x)^2}{x}$

hacia

(b) 4x

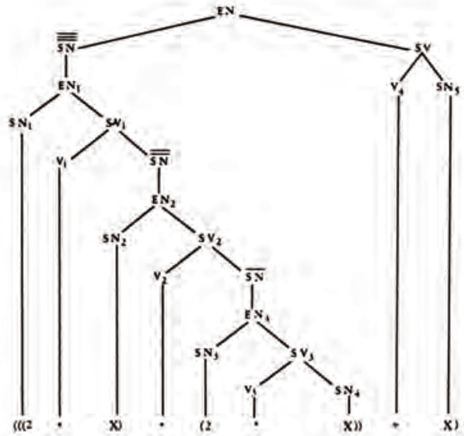
La estrategia del algebrista se desarrolla en ocho pasos derivativos que Kirshner denota con las expresiones (c) a (j):

(c)[3] ((2Mx)E2)Dx	(g) ((4Mx)Mx)Dx
(d) ((2E2)M(xE2))Dx	(h) (4Mx)M(xDx)
(e) (4M(xE2))Dx	(i) (4Mx)Ml
(0 (4M(xMx))Dx	(j) 4Mx

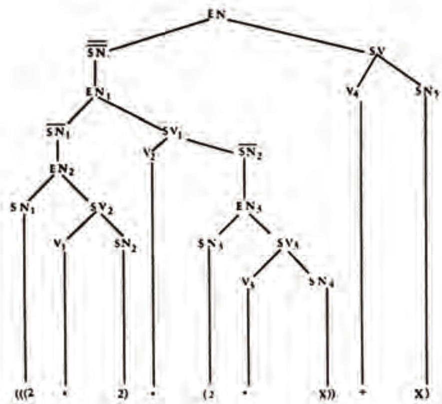
En la Figura 2 (diagramas (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7) y (8)) he reinterpretado estas expresiones con árboles gramaticales de su estructura profunda numerando entre paréntesis los ocho pasos seguidos en la derivación transfonnativa, y escribiendo a un lado la fonna superficial que tiene cada una de las reglas. Las reglas (e) y (f) de Kirslmer, es decir, el diagrama (3) (4) en la Figura 2, se sintetizan en sólo un árbol gramatical debido a la notación empleada para la categoría gramatical con barras, como también se puede observar en el diagrama (1) de la Figura 2, en donde el sintagma nominal con tres-barras describe la estructura de la elevación al cuadrado de 2x.

3 M "def" operación de multiplicación; D "def' operación de división; E "def' operación de elevación exponencial (el dígito que le sigue a E indica el exponente, el dígito que le antecede indica un numeral); x "def" 'variable'.

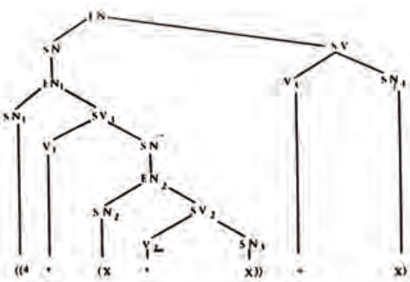
(1) $\frac{(2x)^2}{x}$



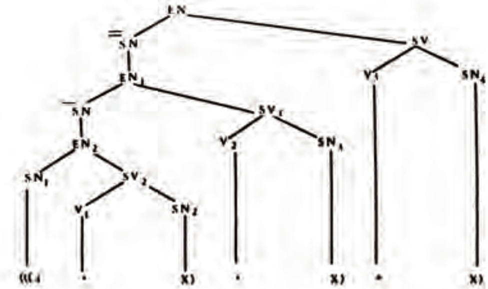
(2) $\frac{2^2 x^2}{x}$



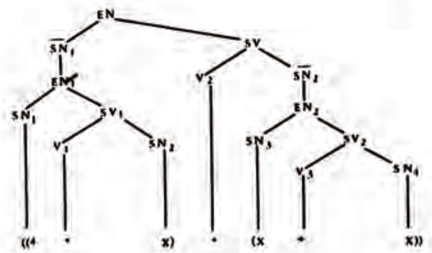
(3) (4) $\frac{4x^2}{x}$ $\frac{4(x \bullet x)}{x}$



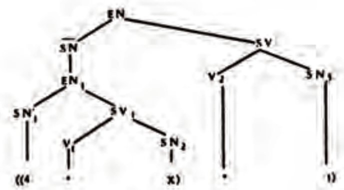
(5) $\frac{(4x)x}{x}$



(6) $\frac{4x \bullet x}{x}$



(7) $4x \bullet 1$



(8) 4x

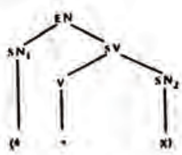


Figura 2. Transformación gramatical de $\frac{(2x)^2}{x} = 4x$ (Hernández-Márquez)

Como se podrá observar por los diagramas arbóreos, la transición de una expresión a otra como paso de derivación, trae consigo una reestructuración del árbol gramatical anterior, en consonancia con la reestructuración de la expresión superficial. Otra característica digna de observarse, es la paulatina reducción de las reglas de estructura de base para describir las distintas expresiones transformadas (ver Cuadro 2). Así, por ejemplo, en la transición de la expresión (d) a la (e) de la estrategia del algebrista (representada con (2) y (3)(4) respectivamente en la Figura 2 y, por [β] y [x], respectivamente, en el Cuadro 2) se eliminan cinco reglas de derivación de la estructura de la base de la siguiente expres'ón ([x]) (ver Cuadro 2), lo mismo que en la transición de la [ε] a la [ø] y de la [ø] a la [γ][4]

(α)	(β)	(χ)
(1) EN → SN, SV	(1) EN → SN, SV	(1) EN → SN, SV
(2) SV → V4, SN5	(2) SV → V_4, SN_5	(2) SV → V_3, SN_4
(3) SN → EN_1	(3) SN → EN_1	(3) SN → EN_1
(4) EN_1 → SN_1, SV_1	(4) EN_1 → SN_1, SV_1	(4) EN_1 → SN_1, SV_1
(5) SN_1 → 2	(5) SN_1 → EN_2	(5) SN_1 → 4
(6) SV_1 → V_1, SN	(6) EN_2 → SN_1, SV_2	(6) SV_1 → V_1, SN
(7) V_1 → ●	(7) SN_1 → 2	(7) V_1 → ●
(8) SN → EN_2	(8) SV_2 → V_1, SN_2	(8) SN → EN_2
(9) EN_2 → SN_2, SV_2	(9) V_1 → ●	(9) EN_2 → SN_2, SV_2
(10) SN2 → x	(10) SN_2 → 2	(10) SN_2 → x
(11) SV_2 → V_2, SN	(11) SV_1 → V_2, SN_2	(11) SV_2 → V_2, SN_3
(12) V_2 → ●	(12) V_2 → ●	(12) V_2 → ●
(13) SN → EN_3	(13) SN_2 → EN_3	(13) SN_3 → x
(14) EN_3 → SN_3, SV_3	(14) EN_3 → SN_3, SV_3	(14) V_3 → ÷
(15) SN_3 → 2	(15) SN_3 → x	(15) SN_4 → x
(16) SV_3 → V_3, SN_4	(16) SV_3 → V_3, SN_4	
(17) V_3 → ●	(17) V_3 → ●	
(18) SN_4 → x	(18) SN_4 → x	
(19) V_4 → ÷	(19) V4 → ÷	
(20) SN_5 → x	(20) SN_5 → x	

Cuadro 2. (a)

4 En el Cuadro hemos reescrito con distinta notación a las mismas estructuras de las expresiones de la Figura 2. Los subíndices de las categorías gramaticales, sólo tienen el propósito de ayudar a su identificación y no se les asigna significado alguno.

(δ)

(1)	EN	$\rightarrow$	SN_1, SV
(2)	SN_1	$\rightarrow$	EN_1
(3)	EN_1	$\rightarrow$	SN_1, SV_1
(4)	SN_1	$\rightarrow$	4
(5)	SV_1	$\rightarrow$	V_1, SN_2
(6)	V1	$\rightarrow$	$\bullet$
(7)	SN_2	$\rightarrow$	x
(8)	SV	$\rightarrow$	V_2, SN_2
(9)	V_2	$\rightarrow$	$\bullet$
(10)	SN_2	$\rightarrow$	EN_2
(11)	EN_2	$\rightarrow$	SN_3, SV_2
(13)	SV_2	$\rightarrow$	V_3, SN_4
(14)	V_3	$\rightarrow$	$\div$
(15)	SN_4	$\rightarrow$	x

(ε)

(1)	EN	$\rightarrow$	SN, SV
(2)	SV	$\rightarrow$	V_3, SN_4
(3)	SN	$\rightarrow$	EN_1
(4)	EN_1	$\rightarrow$	SN, SV_1
(5)	SN	$\rightarrow$	EN_2
(6)	EN_2	$\rightarrow$	SN_1, SV_2
(7)	SN_1	$\rightarrow$	4
(8)	SV_2	$\rightarrow$	V_1, SN_2
(9)	V_1	$\rightarrow$	$\bullet$
(10)	SN_2	$\rightarrow$	x
(11)	SV_1	$\rightarrow$	V_2, SN_3
(12)	V_2	$\rightarrow$	$\bullet$
(13)	SN_3	$\rightarrow$	x
(14)	V_3	$\rightarrow$	$\div$
(15)	SN_4	$\rightarrow$	x

(ϕ)

(1)	EN	$\rightarrow$	SN, SV
(2)	SV	$\rightarrow$	V_2, SN_3
(3)	SN	$\rightarrow$	EN_1
(4)	EN_1	$\rightarrow$	SN_1, SV_1
(5)	SN_1	$\rightarrow$	4
(6)	SV_1	$\rightarrow$	V_1, SN_2
(7)	V_1	$\rightarrow$	$\bullet$
(8)	SN_2	$\rightarrow$	x
(9)	V_2	$\rightarrow$	$\bullet$
(10)	SN_3	$\rightarrow$	1

(γ)

(1)	EN	$\rightarrow$	SN_1, SV
(2)	SN_1	$\rightarrow$	4
(3)	SV	$\rightarrow$	V, SN_2
(4)	V	$\rightarrow$	$\bullet$
(5)	SN_2	$\rightarrow$	x

Cuadro 2. (b)

Como se podrá observar por la comparación de las distintas estructuras profundas en el Cuadro 2, la transición de la expresión [*a*] a la expresión [*β*] se produce con la simple reordenación de las reglas de la [*a*], es decir los pasos (8) y (9) de la [a] pasan a ocupar la tercera y cuarta posiciones de la [*β*], desplazando hacia abajo las demás reglas, mientras que el paso (15) de la [*a*] intercambia posición al convertirse en el paso (10) de la [*β*]. Es este tipo de reordenaciónes que se repiten otra vez en la [*x*], [*δ*] y en la [*ε*] son las que bien podrían ser consideradas como parte de las reglas de reestructuración. Sólo las reducciones de pasos, entre la [*β*] y la [*x*]; la [*ε*] y la [ø]; y la [ø] y la [*ɣ*], pueden ser consideradas propiamente como transformaciones, ya que estos cambios se producen a través de sustituciones tales como:

(k) $2 \bullet 2 \rightarrow 4$

(l) $x \div x \rightarrow 1$

(m) $4x \bullet 1 \rightarrow 4x$

que de alguna manera se implican en las reglas de transfonnación de Kirshner.

4.0 Discusión

Por lo que se acaba de plantear, es posible dar una descripción gramatical de la destreza de un matemático competente para manipular símbolos algebraicos en el sentido propuesto por Kirslmer. Esta descripción gramatical análoga es, a su vez, comparable con una descripción gramatical de una lengua natural. Asimismo, he mostrado que los obstáculos que plantea Kirslmer para hacer este tipo de descripción análoga con categorías gramaticales no es tal. Creo que tanto en Kirslmer (1987) como en Hernández-Márquez (1989) están dadas las bases para proceder con un análisis del tipo propuesto en este trabajo. Creo que sus resultados e implicaciones tienen utilidad para el campo de la matemática educativa, tanto como para la teoría lingüística en boga, especialmente en lo que se refiere a la noción de bilingüismo y adquisición de segunda lengua. Por último, la aportación de este planteamiento muestra, ante todo, una pequeña rendija a un mundo que aún no ha sido explorado y el cual requiere, para su exploración, un trabajo de tipo interdisciplinario por la complejidad que ambos campos plantean. Es posible que con este enfoque se pueda llegar a resultados todavía mucho más interesantes.

BIBLIOGRAFIA

CARRY, L. R-, LEWIS, C. & BERNARD, J. E. (1980). **Psychology of equation solving: An information processing study**. Tech. Rep. SED 78-93. The U. of Texas. Austin, Texas.

COOK, V. J. (1988). **Chomsky's Universal Grammar: An Introduction**. Basil Blackwell Ltd. Oxford.

CHOMSKY, A. N. (1957). **Syntactic Structures**. Mouton. La Haya.

________ (1965). **Aspects of the Theory of Syntax**. Cambridge. Mass. MIT Press.

_________(1981). **Lectures on Government and Binding**. Dordrecht. Foris.

________ (1986). **Barriers**. Cambridge, Mass. MIT Press.

HERNÁNDEZ-MÁRQUEZ B., B. (1989). **Sintaxis del álgebra elemental. Un sistema generativo de expresiones y ecuaciones básicas**. Tesis de Grado. UN AM. México.

KIRSHNER, D. (1987). **The Grammar of Symbolic Elementary Algebra**. Tesis de Grado. U. of British Columbia. Vancouver, Canadá.